令 和 6 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学（理系）

200 点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページをあわせて 16 ページある．
3. 問題は全部で 6 題ある（1 ページから 2 ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，その問題の解答用ページの見開きに隣接する計算用ページを，解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は続き方を示し，解答用ページに「計算用ページに続く」旨を明示すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

(30 点)

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めよ．

2

(30 点)

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

3

(30 点)

座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする．実数 x，y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件を求めよ．

4

(30 点)

与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0, a_1, a_2, … を次のように定める.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.

(2) a_0, a_1, …, a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.

5

(40 点)

a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする.

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ.

(1) D_a の面積 S_a を求めよ.

(2) $\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ.

6

(40 点)

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である.

問題は，このページで終わりである。