令 和 6 年 度 特 色 入 試 問 題

《 理 学 部（数理科学入試）》

数学に関する能力測定考査

80 点 満 点

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと.
2. 問題は全部で 4 題ある（1 ページから 4 ページ）.
3. 解答冊子は問題ごとに 1 冊ずつある（全部で 4 冊ある）. それぞれの解答冊子は表紙のほかに 8 ページある.
4. 試験開始後, それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること. 表紙には, これら以外のことを書いてはならない.
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと. ただし, 続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい. この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する. それ以外の場合, 計算用ページは採点の対象としない.
6. 解答のための下書き, 計算などは, 計算用ページに書いてもよい.
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある.
8. 解答冊子は, どのページも切り離してはならない.
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが, 解答冊子は持ち帰ってはならない.

$\boxed{1}$ (20 点)

2 以上の自然数 n に対して，n を割り切る素数の個数を $f(n)$ とする．例えば $n = 120$ のとき，120 を割り切る素数は 2 と 3 と 5 なので，$f(120) = 3$ である．不等式 $f(n) \geqq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ を満たす 2 以上の自然数 n をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ (20 点)

$x^{100} - 3x^{10} - 2x - 1 = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

$\boxed{3}$ (20 点)

座標平面上の円 $\mathrm{D}_1 : x^2 + y^2 = 64$ と円 $\mathrm{D}_2 : x^2 + (y-4)^2 = 9$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) 座標平面上の 3 点 $(0, 8)$，$(3\sqrt{7}, 1)$，$(-3\sqrt{7}, 1)$ を頂点とする三角形の外接円は D_1 であり，内接円は D_2 であることを示せ．

(2) D_1 が外接円であり，さらに D_2 が内接円である任意の三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，実数 α, β, γ を

$$\alpha = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}}{2} - \mathrm{BC},$$
$$\beta = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}}{2} - \mathrm{CA},$$
$$\gamma = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}}{2} - \mathrm{AB}$$

と定める．このとき $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 105$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ (20 点)

t を実数とする．投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるコインを 10 回投げて，座標空間の点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_{10}$ を以下で定める．

- P_0 の座標は $(1,2,3)$ とする．
- n を $1 \leqq n \leqq 10$ を満たす任意の自然数とする．P_{n-1} の座標が (x,y,z) であるとき，もし n 回目のコイン投げで表が出たなら P_n の座標は $((1-t)x+ty, x, z)$ とし，裏が出たなら P_n の座標は $(x, (1-t)y+tz, y)$ とする．

例えば $t=-1$ のとき，1 回目のコイン投げで表，2 回目のコイン投げで裏が出たなら，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の座標はそれぞれ $(1,2,3)$，$(0,1,3)$，$(0,-1,1)$ となる．また $t=-1$ のとき，P_1 が取り得る座標空間の点は $(0,1,3)$ と $(1,1,2)$ の 2 個である．以下の設問に答えよ．

(1) $t=-1$ のとき，P_3 の座標が $(1,0,1)$ となる確率を求めよ．

(2) P_{10} が取り得る座標空間の点の個数を $N(t)$ とする．$N(t) \geqq 250$ となる実数 t が存在するかどうかを判定せよ．

問題は，このページで終わりである．