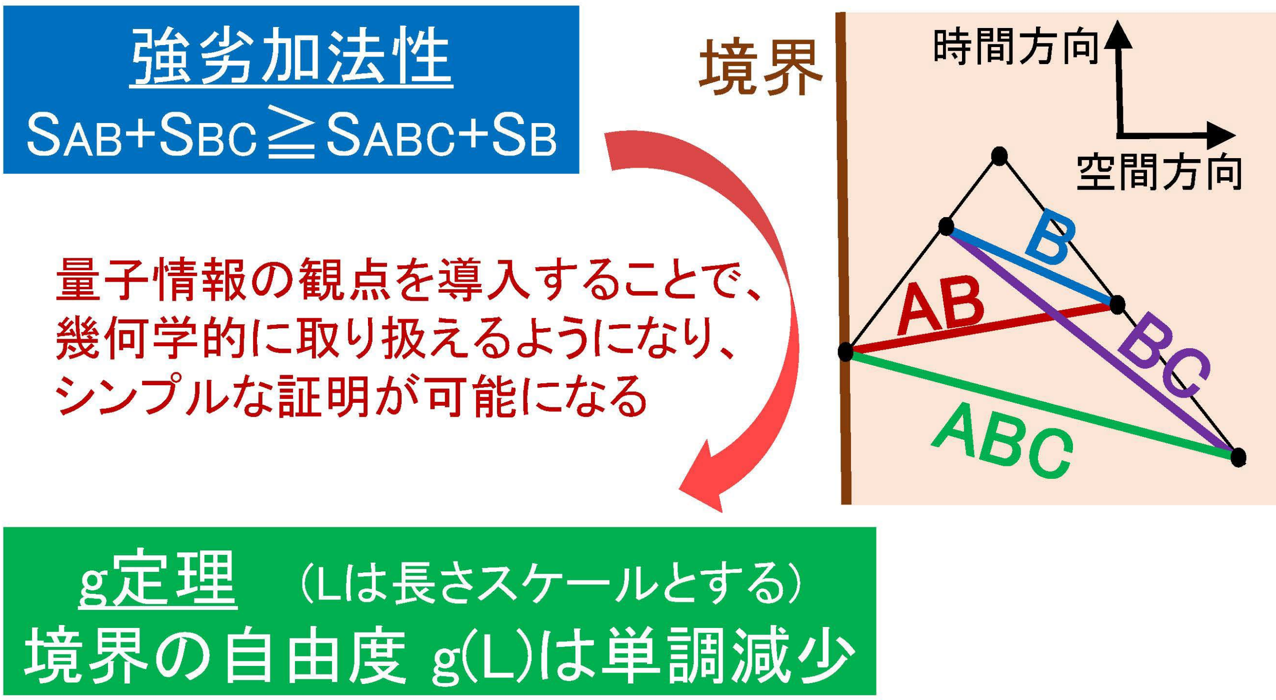
# 量子臨界点における境界自由度の単調性を量子情報から導出
## ―量子エンタングルメントの三角不等式を用いた量子物質の幾何学的理解―

**概要**


京都大学基礎物理学研究所　神田大樹 博士課程学生、田耕健也　同修士課程院生、Harper 同研究員、高柳匡　同教授、の研究グループは、量子情報で基本的な不等式として知られる「強劣加法性」から、「1 次元量子臨界点における境界の自由度はエネルギースケールを小さくするにつれて単調に減少する」という g 定理と呼ばれる性質を幾何学的に導出することに成功しました。量子情報理論において、エンタングルメント・エントロピーは二体間の量子的な相関を測る重要な量ですが、強劣加法性と呼ばれる、三角不等式に類似した不等式を満たすことが良く知られています。本研究では、この強劣加法性を、1 次元量子臨界点に対応する 2 次元共形場理論が境界を持つ場合に適用し、共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーの特徴的な振る舞いを巧妙に利用することで、境界を持つ共形場理論において最も基本的な性質と言える g 定理を明快に導出することができました。相互作用のある系において、量子論的な解析は一般に大変複雑です。しかし今回の研究では、量子情報理論の考察による幾何学的な視点からシンプルな証明を与えることができたことは画期的であり、こういった研究手法は今後、多方面への応用が期待されます。

本成果は、2024 年 7 月 19 日に米国の国際学術誌「Physical Review Letters」にオンライン掲載されました。


## 1.　背景

絶対零度に置かれた量子物質において、磁場や圧力などといったパラメーターを変化させると、物質の状態が大きく変わる量子相転移がしばしば起こります。そのような相転移が起こる点（量子臨界点）では、長さのスケールを変えても性質が変わらないというスケール対称性が現れます。このような点では、さらに特殊相対性理論に登場するローレンツ対称性が現れることも多く、その場合には共形場理論と呼ばれる理論で

表すことができます。個々の共形場理論の性質を理解する上で、その理論が持つ自由度の量は最も基本的な指標です。空間次元が 1 次元の場合には、中心電荷（セントラル・チャージ C）と呼ばれる量で自由度を定量化できます。

ある共形場理論に、何らかの相互作用を加えた場合、どのような現象が起こるのかを理解することは、非常に重要な課題です。その際に、どんな相互作用を加えても中心電荷は増えることはない、という「C 定理」が知られています。言い換えると、C 定理は「ローレンツ対称性を持つ場の量子論を考えた時に、繰り込み群の意味で長さスケールを大きくしていくと、必ず中心電荷は単調に減少する」ことを主張しています。C 定理は Zamolodchikov によって 1986 年に証明されました。繰り込み群の意味で長さスケールを大きくする（つまり、エネルギースケールを小さくする）ということは、量子系を粗視化していくことを意味し、その時に自由度は必ず単調に減少するというわけです。例えば、この定理を用いると、ある共形場理論に相互作用を加えた場合に、最終的にどの共形場理論に近づくのかという問題に対して重要な制限を与えてくれます。

また、量子臨界点に置かれた量子物質が不純物を持つ場合（例えば近藤効果など）は、境界を持つ空間における共形場理論を用いて表せることが知られています。そのような場合には、空間内部だけではなく、境界上でも量子臨界点になっている状態が現れ、この境界上の臨界点を特徴づけることが重要となります。このときに、境界上の自由度を表す量は g 関数（もしくは境界エントロピーとも呼ばれる）と呼ばれ、Affleck と Ludwig によって 1991 年に導入されました。境界を持つ空間における共形場理論に対して、境界上に局在する相互作用を加えた場合に、どのように g 関数が変化するかという問題に対しても g 定理、すなわち「長さスケールを大きくしていくと、必ず g 関数は単調に減少する」が成り立つことが空間 1 次元の場合に Friedan と Konechny によって 2003 年に証明されています。これは境界に対する C 定理として位置づけられ、境界を持つ共形場理論の最も基本的な性質と言えます。

さて、上記の C 定理や g 定理は量子臨界点における自由度の単調性を表す非常に重要な定理であり、場の量子論を用いて既に導出されています。しかし、その証明自体を見ても、量子多体系のどのような根源的な性質から生じているものなのか理解することは難しいです。一方で、C 定理や g 定理が主張するように、系を粗視化する（エネルギースケールを下げる）と自由度が減っていくのは、直観的にも自然であり、量子系として何か基本的な要請から説明できるのではないかと期待したくなります。実際、2004 年に Casini と Huerta によって、量子情報理論の基本的性質として知られる強劣加法性を用いて、空間 1 次元系（時間も次元に含めて 2 次元共形場理論）に対して C 定理が証明できることが示されました。この強劣加法性は、二体間の量子相関の強さを測る量であるエンタングルメント・エントロピーが満たす不等式で、幾何学の三角不等式に類似しています。三角不等式とは、三角形の二つの辺の長さの和が、もう一つの辺の長さより大きいという有名な関係式です。また、熱力学とのアナロジーで言うと、強劣加法性は熱力学の第二法則に相当する位置づけです。

このように C 定理は、量子情報のあり方を規定している強劣加法性から、かなりシンプルな計算で導出できます。では、同様に g 定理は導出することができるでしょうか？実はこれはかなり難しく見える問題です。C 定理の導出では、強劣加法性に加えて、ローレンツ対称性と並進対称性をうまく活用することで、エンタングルメント・エントロピーを 1 変数関数として取り扱うことができました。しかし、境界があると、ローレンツ対称性と並進対称性がともに破れてしまい、エンタングルメント・エントロピーは多変数の関数となってしまい、解析が困難に見えるのです。しかし本研究では、次に述べる手法で、この問題を回避し、ノート 1 ページ程度の比較的シンプルな計算で、強劣加法性から g 定理を証明できることを見出しました。

**２．研究手法・成果**

本研究では、時間 1 次元と空間 1 次元からなる 2 次元時空における共形場理論に対して、空間方向に境界

を持つ場合に g 定理を強劣加法性から、次のように導出しました。エンタングルメント・エントロピー$S_A$は、ある部分領域Ａとそれ以外の領域との間の量子的な相関を測る量で、部分領域Ａの取り方にその値が依存します。また、g 関数は、量子臨界点においてエンタングルメント・エントロピーの有限部分に等しいことが知られており、長さのスケールＬは、部分領域の大きさと同一視できます。

さて、３つの異なる部分領域Ａ,Ｂ,C を選び、Ａと B の和を AB など書くと、強劣加法性は AB と BC と ABC と B のそれぞれに対するエンタングルメント・エントロピーに関する不等式（図の左上）で与えられます。この４つの部分領域を、境界に隣接する三角形の内部に図の右にあるように選びます。このとき、エンタングルメント・エントロピーの強劣加法性の不等式を g 関数の不等式に書き換えて、g 定理を証明することにします。しかし、このとき、境界があるせいで 2 次元時空のローレンツ対称性や並進不変性が破れてしまい、前述のように、一見解析が困難になります。例えば、部分領域 B のエンタングルメント・エントロピーは、両方の端点の座標の値に依存してしまいます。

そこで工夫が必要なのですが、実は部分領域 B と BC の傾きを光の速度に近づくように大きく取ると、エンタングルメント・エントロピーが境界の位置に依存しなくなる、という性質を見出すことができます。このトリックを用いることで、強劣加法性を１変数の関数の不等式として表すことができ、それを整理することで、g 定理、すなわち「g 関数が長さスケールＬを大きくすると単調に減少する」という性質を導くことができました（図の左下）。これが本研究の成果である、強劣加法性からの g 定理の証明です。

## ３．波及効果、今後の予定

本研究では、量子臨界点の量子物質やそれを表す共形場理論に関する基本的な定理を量子エンタングルメントの不等式から導出しました。このことから、量子多体系の自由度は量子エンタングルメントが担っていることが示唆されます。量子多体系の波動関数は、一般に代数的に非常に複雑な形をしています。しかし、量子情報の立場から眺めると、幾何学的な視点が得られ、三角不等式のような基本的な幾何学的性質から、空間１次元の量子多体系の普遍的な性質を得ることができました。今後の課題の一つは、より高次元の共形場理論に境界や欠陥があるような場合に、自由度の単調性を量子情報の不等式から導くことです。最終的には、量子多体系のダイナミクス自体を量子情報の立場で書き換えて理解することが野心的な目標です。強く相互作用する量子多体系は、数値計算や量子計算機でさえも解くことが難しいと思われますが、こういったことが可能になれば、幾何学的な手法で比較的容易に解析できるようになるかもしれません。

このヒントとして、重力理論と共形場理論の等価性を意味する AdS/CFT 対応があります。AdS/CFT 対応では、「反ドジッター宇宙における面積が最小となる曲面（極小曲面）の面積がエンタングルメント・エントロピーに等しくなる」という公式（笠-高柳公式）が知られています。興味深いことに、共形場理論の強劣加法性は、AdS/CFT 対応を経由すると、曲がった宇宙における三角不等式そのものになります。このように考えると、AdS/CFT 対応は、先ほど述べた量子情報の観点から幾何学的に量子多体系を捉えることを実践しているように思えます。また、AdS/CFT は共形場理論が境界を持つ場合にも拡張することができ、この場合にも強劣加法性を幾何学的に導出できることを本論文中でも証明しました。しかし、本研究のメインの成果である強劣加法性からの g 定理の証明は、通常の AdS/CFT 対応の範疇に入らないような、より一般の共形場理論に対しても適用でき、量子情報による幾何学的なアプローチがより一般的に有効であることを意味しています。これは共形場理論だけでなく、重力理論に対しても重要な示唆を与えており、今後の研究が待たれます。

## ４．研究プロジェクトについて

本研究は、文部科学省点日本学術振興会 科学研究費助成事業　学術変革領域研究（Ａ）「極限宇宙の物理法則を創る－量子情報で拓く時空と物質の新しいパラダイム」（領域代表者：高柳匡、課題番号：21H05187）、

日本学術振興会 科学研究費助成事業　基盤研究（A）「量子情報理論を用いた超弦理論の研究」（研究代表者：高柳匡、課題番号：21H04469）

**＜用語解説＞**

[1]場の量子論と共形場理論

場の量子論とは、無数の粒子からなる量子系（量子多体系、量子物質）を粒子の生成や消滅を含めて記述することができる理論で、素粒子物理や物性物理の基礎理論としての重要な役割を持ちます。角度を変えない変換を共形変換と呼び、場の量子論の中でも特に共形変換で不変となる量子物質の理論を共形場理論と呼びます。英語では Conformal Field Theory、略して CFT と呼びます。共形場理論は特に、拡大縮小しても変わらないというスケール対称性を有しており、量子物質の量子臨界点において実現される理論です。

[2]量子情報と量子エンタングルメント

ミクロな世界の物理法則が量子論で、ミクロな世界の情報を量子情報とよびます。マクロな世界（古典論）では、二進法では 0 と 1 の状態のどちらかが実現され、情報の最小単位である 1 ビットになります。しかし、ミクロな世界（量子論）では、0 と 1 の重ね合わせの状態をとることができ、これを 1 量子ビットと呼びます。量子ビットが A、B と 2 つある場合を考えると、A も B も 0 である状態と、A も B も 1 である状態を均等に重ね合わせた状態を考えると、A の情報と B の情報が最も強く相関します。このように量子論に特有の相関を量子エンタングルメント（量子もつれ）と呼びます。このように 2 量子ビットの系で最大にエンタングルした状態をベル状態ないし EPR 状態と呼び、1 量子ビット分のエンタングルメントに相当します。

[4]エンタングルメント・エントロピー

与えられた量子系において「部分系 A」と「それ以外の部分」の 2 体間に、ベル状態の何個分の量子エンタングルメントがあるのか測る量がエンタングルメント・エントロピーです。数学的には、A に制限した密度行列のフォンノイマン・エントロピーとして定義され、$S_A$ と書きます。

[5]強劣加法性

エンタングルメント・エントロピーが必ず満たす基本的な不等式で、具体的には量子系を A、B、C とそれ以外に 4 分割した場合に、$S_{AB}+S_{BC} \geqq S_{ABC}+S_B$ で与えられます。英語で Strong subadditivity と呼び、Lieb と Ruskai によって 1973 年に証明されました。

[6]特殊相対性理論

異なる速度で等速運動を行う観測者間の等価性（ローレンツ不変性）を公理とした物理学の理論体系であり、速度が光速を超えることは不可能であることや、質量とエネルギーの等価性などが導かれます。アインシュタインが 1905 年に発見した理論です。

[7]繰り込み群

物理系を異なる長さスケールで見たときの変化を系統的に調べる手法です。ミクロなスケールでみた物理系の詳細を粗視化することで、よりマクロなスケールの物理系を捉えることができます。これによって、考えている長さスケールによって、相互作用の強さが変わっていくという重要な現象が起こります。

[8]反ドジッター宇宙

マクロな宇宙における重力のダイナミクスは、一般相対性理論のアインシュタイン方程式によって決まります。アインシュタイン方程式における項の一つが宇宙項と呼ばれ、その係数を宇宙定数と呼びます。物理的には宇宙項は真空のエネルギー（ダークエネルギー）を意味します。特に宇宙定数が負の場合にアインシュタイン方程式の代表的な解が反ドジッター宇宙です。円板のような空間構造をしており、境界で囲まれ、時間が経過しても大きさが変化しない宇宙です。英語では Anti de Sitter Space、略して AdS と呼びます。

[9]AdS/CFT 対応
反ドジッター宇宙（AdS）の重力理論は、その端に存在する共形場理論（CFT）と同一の理論となるという対応関係。反ドジッター宇宙を円板と思うと、円板の外周に共形場理論が位置します。Maldacena によって、1997 年に発見されました。ゲージ重力対応とも呼びます。

[10]笠-高柳公式（ホログラフィック・エンタングルメントエントロピー）
AdS/CFT 対応に基づいて、共形場理論のエンタングルメント・エントロピーを重力理論の立場で計算する公式。AdS/CFT 対応においては、反ドジッター宇宙の端に共形場理論が存在すると考えられるので、その端に部分系 A をとり、それを宇宙内部に拡張した曲面を考えます。そのような曲面の中でも、面積が最小となる曲面（極小曲面）を選び、その面積を重力定数の 4 倍で割ったものがホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーです。これは 2006 年に笠と本論文の著者の一人である高柳が発見しました。

**＜研究者のコメント＞**
この g 定理の強劣加法性からの証明は、問題自体は大変シンプルなのですが、トライするとすぐに行き詰る難問で、2007 年から 17 年にわたってチャレンジしてきた問題です。しかし今回、ついにポスドク研究員や大学院生との刺激的な共同研究のおかげで、重要なトリックに気が付くことができました。そのおかげで、この問題をエレガントに解決することができ、大変うれしく思っています。今後はさらに、量子情報の不等式を物理学へ応用する例を増やしていきたいと思っております。（高柳匡）

**＜論文タイトルと著者＞**
タイトル： *g* Theorem from Strong Subadditivity
（強劣加法性から g 定理へ）
著　者： Jonathan Harper, Hiroki Kanda, Tadashi Takayanagi, and Kenya Tasuki
掲 載 誌： *Physical Review Letters* （Phys. Rev. Lett. 133, 031501）
DOI：10.1103/PhysRevLett.133.031501